1, 2, 3. . .Sciences

Année académique 2019-2020

Exercices de mathématiques
Exercices récapitulatifs

Les exercices précédés de (*) ne doivent pas être réalisés par les étudiants dispensés.

Version 21 novembre 2019

Exercices divers

1. (*) Résoudre les équations et inéquations suivantes (pour (c) et (d), on suppose que $x \in [2\pi, 3\pi]$)
   (a) $2x(x-1) = |x-1|$
   (b) $\dfrac{|2-x|}{x^2-4} \geq x-2$
   (c) $\sin(2x)\cos(x) = \sin(x)$
   (d) $\cos(2x) \leq \cos(x)$

2. (*) Si c'est possible, simplifier au maximum les expressions suivantes :
   (a) $\sin(\ln(e^{-\pi/6})) + \cos(\mathrm{tg}(-\pi/3))$
   (b) $\arccos(1 - \sin(5\pi/6)) + \arcsin(\sin(7\pi/6))$

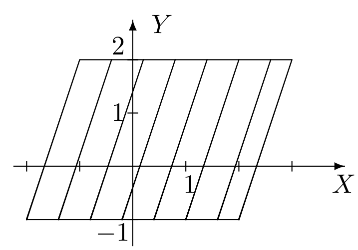
3. (*) Dans un repère orthonormé, on donne les points A, B, C dont les coordonnées sont $A(1,-1,3)$, $B(-1,2,1)$ et $C(3,2,-1)$. Calculer
   (a) $2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$
   (b) les composantes de $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}$
   (c) les composantes de la projection orthogonale de $\overrightarrow{BC}$ sur $\overrightarrow{AC}$.

4. (*) Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$.
   (a) $x^2 + 3 = 2ix$
   (b) $8 - x^3 = 0$

5. Représenter dans un repère orthonormé l'ensemble dont une description analytique est la suivante

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 - 1 \geq y^2 \geq 4 - x^2\}.$$

6. Décrire analytiquement l'ensemble fermé hachuré ci-contre
   (a) en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées
   (b) en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses



7. Si elles existent, déterminer les limites suivantes
   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{\ln(x-2)}{x-3}$
   (b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{|1-x|}{\sqrt{1+x^2}}$
   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \mathrm{arctg}\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)$
   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\exp(2x)-1}{x}$
   (e) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (\ln(2x+5) - \ln(2x))$ et $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (\ln(2x+5) - \ln(2x))$

8. Où la fonction $x \mapsto \arcsin(\sqrt{1-4x^2})$ est-elle définie ? dérivable ? En déterminer la dérivée première.

9. Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est la suivante

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -|2x| \geq y \text{ et } y^2 \leq 5 + x\}.$$

   Donner aussi une représentation graphique de l'ensemble.

10. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier la réponse au maximum.
   (a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(4x)}{x}\, dx$
   (b) $\int_{-\infty}^0 x\, e^{2x}\, dx$
   (c) $\displaystyle\int_{-2}^{+\infty} \frac{1}{2+x}\, dx$
   (d) $\int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1-x^2}\, dx$
   (e) $\displaystyle\int_4^5 \frac{2}{x(x^2-4x+4)}\, dx$

11. Résoudre l'équation suivante en spécifiant dans quel intervalle on travaille

$$D^2 f(x) + f(x) = x + \sin(x) + \frac{1}{\cos(x)}$$

(*) Problèmes élémentaires

1. La distance de freinage (en mètres) d'une voiture roulant à v km/h sur sol sec est donnée par
   (a) $\left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{2}$ si cette voiture est équipée de freins normaux
   (b) v si cette voiture est équipée de freins ABS spéciaux.

   Déterminer les vitesses pour lesquelles la voiture équipée de freins ABS est plus performante quant à la distance de freinage.

2. Un homme se promenant sur une route vit venir à lui d'autres hommes et il leur dit "J'aurais aimé que vous soyez deux fois autant que vous êtes, plus la moitié de la moitié de ce double, plus la moitié de ce dernier nombre. Ainsi avec moi vous seriez 100."
   Qu'il dise celui qui le peut, combien étaient les hommes qu'il a vu venir à lui. (Alcuin, 8 ème siècle)

QCM

1. Si f est définie sur $\mathbb{R}$, le graphique de $F(x) = f(-x),\ x \in \mathbb{R}$ est
   (a) le symétrique du graphique de f par rapport à la première bissectrice
   (b) le symétrique du graphique de f par rapport à l'axe X
   (c) le symétrique du graphique de f par rapport à l'axe Y
   (d) le symétrique du graphique de f par rapport à l'origine
   (e) aucune réponse correcte
2. Dans le plan muni d'un repère, une droite a toujours une équation cartésienne du type $y = mx + p$, $(m, p \in \mathbb{R})$
   (a) vrai
   (b) faux
3. Etant donné deux vecteurs non nuls, tout autre vecteur du plan peut se décomposer de manière unique comme combinaison linéaire de ceux-ci.
   (a) vrai
   (b) faux
4. Le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante
   (a) vrai
   (b) faux
5. Le domaine de la fonction donnée par $\cos(\cos x)$ est l'intervalle [-1,1]
   (a) vrai
   (b) faux
6. Le cosinus du carré d'un nombre réel
   (a) est égal au carré du cosinus du réel
   (b) est égal au double du cosinus du réel
   (c) est égal au double du produit du sinus et du cosinus du réel
   (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte